

Anmerkungen zur Gaskinetik

1. Grundlagen: Stoßprozesse

Elastische und unelastische Stoßprozesse spielen eine sehr wichtige Rolle nicht nur in der Gaskinetik, sondern z.B. auch in der Aeronomie (Luftchemie). Bei der gaskinetischen und aeronomischen Behandlung wird die Mechanik des Stoßvorganges selbst nicht betrachtet. Man sieht sich vielmehr die Verhältnisse vor und nach dem Stoß an. Dies ist im allgemeinen dann ausreichend, wenn der Stoßvorgang sehr viel weniger Zeit braucht, als im Mittel für den freien Flug der Teilchen zwischen zwei Zusammenstößen zur Verfügung steht. Es gelten die Erhaltungssätze der Mechanik: vor und nach dem Stoß müssen die vektoriellen Größen Gesamtimpuls und Gesamtdrehimpuls, sowie die skalare Größe Gesamtenergie gleiche Werte haben.

Als Muster seien eindimensionale Stoßprozesse mit zwei Punktmassen angeführt. Der Drehimpuls ist nicht betroffen, die Teilchengeschwindigkeiten und damit Teilchenimpulse und Gesamtimpuls haben nur eine Komponente. Die Indices kennzeichnen die Teilchen, * kennzeichnet die Geschwindigkeiten nach dem Stoß. m : Massen, v : Geschwindigkeitskomponenten.

Impulssatz: $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1^* + m_2 v_2^*$;

Energiesatz (nur kinetische Translationsenergie!): $(m_1/2) v_1^2 + (m_2/2) v_2^2 = (m_1/2) (v_1^*)^2 + (m_2/2) (v_2^*)^2$.

Auflösung dieses Systems von zwei Gleichungen ergibt für die Geschwindigkeitskomponenten nach dem Stoß

$$v_1^* = \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2) + m_2 (v_2 - v_1)}{m_1 + m_2}, \quad v_2^* = \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2) + m_1 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}.$$

Das Teilchen 1 gewinnt die kinetische Energie $\Delta \mathcal{E} = \frac{m_1}{2} \frac{4}{(m_1 + m_2)^2} (m_2^2 v_2^2 - m_1^2 v_1^2)$

Näherung für $m_2 \gg m_1$ bei $v_2 = 0$: $\Delta \mathcal{E} \doteq \frac{m_1 v_1^2}{2} \frac{4 m_1^2}{m_2^2}$.

Beispiel: $m_2/m_1 = 20000$ (Elektronen und O-Atome) gibt $\Delta \mathcal{E} \doteq -(m_1/2) v_1^2 \times 10^{-8}$. Pro elastischem Stoß können freie Elektronen also nur sehr wenig Energie auf in Ruhe befindliche Sauerstoffatome abgeben. Nimmt man $(m_2/2) v_2^2 = (m_1/2) v_1^2$ an (z.B. mittlere thermische kinetische Energie bei gleichen Temperaturen), so ist immer noch $\Delta \mathcal{E} \doteq (m_1/2) v_1^2 \times 2 \times 10^{-4}$.

Das Teilchen 1 gewinnt den Impuls $\Delta p = 2 m_1 m_2 (v_2 - v_1) / (m_1 + m_2)$, das Teilchen 2 verliert diesen Betrag. Haben die Teilchen gleiche Massen ($m_1 = m_2 = m$), dann wird der Impulsgewinn gleich $\Delta p = m (v_2 - v_1)$. Ist die Masse $m_2 \gg m_1$, dann gilt die Näherung $\Delta p = 2 m_1 (v_2 - v_1)$.

Von Punktmassen kann sofort auf zentrale Stöße mit glatten elastischen Kugeln übergegangen werden. (Zentral: Geschwindigkeitsvektoren in der Verbindungsgeraden der Kugelmittelpunkte; glatt: keine Drehimpulsübertragung möglich; elastisch: keine bleibende Deformation und damit keine Aufnahme oder Abgabe von "innerer Energie".)

Man kann zeigen, daß beim nicht-zentralen elastischen Stoß glatter Kugeln *im Mittel* die Energieübertragungsverhältnisse des eindimensionalen Stoßes von Punktmassen gelten. Die Verteilung von Translationsenergie über elastische Stoßvorgänge ist am wirkungsvollsten bei gleichartigen Teilchen. Bei großem Massenunterschied wird pro Stoßvorgang im Mittel nur sehr wenig Energie von leichten Teilchen auf schwere übertragen.

Wegen der Quantelung der (inneren) Energiezustände von Atomen und Molekülen verlaufen bei kleinen Teilchengeschwindigkeiten die Zusammenstöße zwischen Neutralgasteilchen (Atome und aus wenigen Atomen bestehende Moleküle) untereinander und die zwischen geladenen Teilchen (freie Elektronen, Ionen) und Neutralgasteilchen so ab wie Stöße zwischen glatten elastischen Körpern. (Zumindest bei Molekülen mit großem elektrischen Dipolmoment, wie z.B. H₂O, wird ein Kugelmodell nicht immer ausreichen.)

Die Anzahl von Zusammenstößen, die ein bestimmtes Teilchen im Mittel pro Zeiteinheit erleidet, muß jedenfalls mit der Anzahl von möglichen Stoßpartnern pro Volumeneinheit, der Teilchendichte der Stoßpartner, zusammenhängen. Außerdem wohl auch mit den Flächen senkrecht zur Stoßrichtung. Es ist von Vorteil statt der einfachen Stoßzahlen modifizierte Größen, die “effektiven Impulsübertragungsstoßzahlen” (kurz “effektive Stoßzahlen”) zu verwenden. Außerdem ist es angebracht, nach Stoßpartnern zu trennen.

Es sei ν_{ij} die effektive Stoßzahl für ein bestimmtes Teilchen der Art i mit den Teilchen der Art j . Wenn zunächst einfachheitshalber wieder das eindimensionale Problem betrachtet wird unter der Annahme, daß alle Teilchen einer Art gleiche Geschwindigkeiten haben, dann ist die Kraft, die im Mittel durch Impulsübertragung auf die Teilchen der Art i ausgeübt wird (mittlere Impulsänderung pro Zeiteinheit) $F_{ij} = n_i \nu_{ij} [2m_i m_j (v_j - v_i) / (m_i + m_j)]$ (siehe oben). Im Prinzip kann diese Beziehung zur “Messung” von ν_{ij} verwendet werden.

Da die insgesamt von den Teilchen der Art j auf die Teilchen der Art i ausgeübten Kräfte die insgesamt von den Teilchen der Art i auf die der Art j wirkenden kompensieren (Impulssatz!), muß gelten $F_{ji} = -F_{ij}$ und damit $\nu_{ji}/\nu_{ij} = n_i/n_j$.

Man kann einen gaskinetischen Stoßquerschnitt σ definieren, so daß die effektive Stoßzahl $\nu = n \sigma \bar{v}$ wird, wenn mit n die Teilchendichte der Stoßpartner und mit \bar{v} die mittlere thermische Geschwindigkeit der Teilchen bezeichnet wird.

Der Vorstellung des Stoßes glatter elastischer Kugeln entspricht bei einem Gas einheitlicher Zusammensetzung die Abschätzung des Stoßquerschnitts zu $\sigma \doteq \pi d^2$, wobei mit d der wirksame Teilchendurchmesser gemeint ist. Bei verschiedenartigen Teilchen muß man d^2 durch $(d_1 + d_2)^2 / 4$ ersetzen (d_1, d_2 : wirksame Durchmesser der beiden Teilchen). Die wirksamen Teilchendurchmesser hängen i.a. von den Geschwindigkeiten beim Stoßvorgang ab: sie werden mit wachsenden Geschwindigkeiten kleiner. Der Zusammenhang zwischen wirksamem Durchmesser und mittlerer Teilchengeschwindigkeit (Wurzel aus Temperatur durch Teilchenmasse) kann nur experimentell bestimmt werden. Der Übergang vom eindimensionalen zentralen Stoß auf den realistischen dreidimensionalen Fall bringt eine geringe Verminderung der Stoßquerschnitte, nämlich um den Faktor $2\sqrt{2}/3 = 0.9428$.

Für die mittlere freie Weglänge (Strecke, die ein Teilchen im Mittel zwischen zwei Zusammenstößen im freien Flug zurücklegt) gilt $\lambda_f = \bar{v} / \nu = 1/(\sigma n)$.

Anmerkung: Das Konzept der mittleren freien Weglänge geht von der Annahme des unbeschleunigten Fluges in einem Inertialsystem aus. Bei großem λ_f muß die Wirkung der Erdbeschleunigung berücksichtigt werden, bei geladenen Teilchen überdies die Lorentz-Beschleunigung durch äußere elektrische und magnetische Felder (z.B. Spiralbewegung geladener Teilchen im Erdmagnetfeld statt geradlinigem Flug).

2. Maxwell-Verteilung

Die gaskinetische Theorie führt über die Maxwell-Boltzmann-Statistik zur Verteilung der Geschwindigkeiten von Gasteilchen, die untereinander im thermodynamischen Gleichgewicht sind und nur elastische Stöße erleiden. (Beim Geschwindigkeitsvektor \vec{v} handelt es sich natürlich nur um den ungeordneten “thermischen” Anteil, dem ein geordneter (“Strömungs”-)Anteil überlagert sein kann.)

Für die Geschwindigkeitsvektoren gilt die Verteilungsfunktion

$$f(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi k T} \right)^{3/2} \exp \left[- \frac{m v^2}{2 k T} \right], \quad \text{wobei } v^2 \text{ das Quadrat des Betrages des Geschwindigkeitsvektors ist.}$$

k ist die Boltzmann-Konstante, T die (gaskinetische) Temperatur.

Spannt man \vec{v} in einem Kartesischen Koordinatensystem auf (Komponenten (v_x, v_y, v_z)), dann erhält man durch Integration die Verteilungsfunktion für eine Geschwindigkeitskomponente, z.B.

$$\begin{aligned} f_z(v_z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{v}) dv_x dv_y = \left(\frac{m}{2\pi k T} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[- \frac{m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2 k T} \right] dv_x dv_y = \\ &= \left(\frac{m}{2\pi k T} \right)^{1/2} \exp \left[- \frac{m v_z^2}{2 k T} \right] \end{aligned}$$

Für die Beträge gilt $\phi(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{mv^2}{2kT}\right]$

Die Verteilungsfunktionen geben die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen mit bestimmten Eigenschaften zu finden. Verwendung: $dN/N = \phi(v) dv$ etc. (N : Gesamtzahl Teilchen). Will man die Anzahl von Teilchen ΔN bestimmen, die thermische Geschwindigkeitsbeträge zwischen v_1 und v_2 haben, dann muß man die Verteilungsfunktion über diesen Geschwindigkeitsbereich integrieren:

$$\Delta N = N \int_{v_1}^{v_2} \phi(v) dv. \quad \text{Wie sich wegen } \int_0^\infty \exp(-x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ leicht nachweisen läßt,}$$

erhält man mit $v_1 = 0$ und $v_2 \rightarrow \infty$ die Gesamtzahl der Teilchen, da dann $\int_0^\infty \phi(v) dv = 1$.

Durch Differenzieren der Funktion $x^2 \exp(-x^2)$ erhält man die Extremwertstellen $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 \rightarrow \infty$. Das einzige Maximum ist bei x_2 zu finden, was $v_{max}^2 = 2kT/m$ gibt ("wahrscheinlichste Geschwindigkeit" $v_w = v_{max}$).

Die mittlere Geschwindigkeit erhält man aus $\int_0^\infty v \phi(v) dv$ was wegen $\int_0^\infty x^3 \exp(-x^2) dx = (1/2)$ ergibt $\bar{v} = \sqrt{2kT/m} (2/\sqrt{\pi}) = v_w (2/\sqrt{\pi}) = 1,128 v_w$.

Für das mittlere Geschwindigkeitsquadrat erhält man aus $\int_0^\infty v^2 \phi(v) dv$ wegen $\int_0^\infty x^4 \exp(-x^2) dx = (3/8)\sqrt{\pi}$ das mittlere Geschwindigkeitsquadrat $\bar{v}^2 = 3kT/m$. ($\sqrt{\bar{v}^2} = v_{RMS} = \sqrt{3/2} v_w = 1,2247 v_w$.)

Zahlenwerte Geschwindigkeiten:

Mit dem Zahlenwert der Boltzmann-Konstante $k = 1,380652 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ und der atomaren Masseneinheit $u = 1,6605525 \times 10^{-27} \text{ kg}$ wird $k/u = 8314,4144 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ und $\sqrt{2kT/u} = 4078 \text{ m s}^{-1}$ bei $T = 1000 \text{ K}$. Dies ist die wahrscheinlichste Geschwindigkeit (Maximum-Geschwindigkeit) v_w für Wasserstoffatome (oder für Protonen). Mit dem Atomgewicht 16 ergibt sich für Sauerstoffatome oder -ionen $(v_w)_O = 1019 \text{ m s}^{-1}$. Da die Elektronenmasse nur $m_e = u/1836$ ist, folgt $(v_w)_e(T = 1000 \text{ K}) = 1,747 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$.

Da die Druckskalenhöhe $H = (kT)/(mg)$ ist, können die thermischen Geschwindigkeiten auch über Skalenhöhen abgeschätzt werden: $v_m = \sqrt{2kT/m} = \sqrt{2Hg}$.

Thermische Energie in Elektronvolt: Ein einfach geladenes Teilchen erreicht nach Beschleunigung durch ein elektrisches Potential U die kinetische Energie $(m/2)v^2 = eU$. Das Teilchen hat nun eine kinetische Energie von U "Elektronvolt". Die mittlere thermische (Translations-) Energie von $3/2kT$ entspricht bei $T = 1000 \text{ K}$ dem Betrag nach 0.12926 Elektronvolt (eV).

Vergleich mit Energiequanten:

Rotationskonstante	des O_2 :	0,00181 eV
Rotationskonstante	des N_2 :	0,00251 eV
Grundschwingungsquant	des O_2 :	0,196 eV
Grundschwingungsquant	des N_2 :	0,282 eV
Dissoziationspotential	des O_2 :	5,12 eV
Dissoziationspotential	des N_2 :	9,76 eV
Ionisationspotential	des O_2 :	12,08 eV
Ionisationspotential	des N_2 :	15,58 eV
Ionisationspotential	des NO:	9,25 eV
Ionisationspotential	des O :	13,614 eV
Ionisationspotential	des N :	14,54 eV

Anregungsenergie beim atom. Sauerstoff O vom 3P Grundzustand in den metastabilen 1D Zustand: 1,97 eV.

[Umrechnung von Anregungs-, Dissoziations- und Ionisationspotentialen in äquivalente Wellenlängen: Wellenlänge (in nm) entspricht $1239,85 / \text{Anregungspotential (in eV)}$, also Ionisationspotential von 9,25 eV entspricht einer Grenzwellenlänge von 134,0 nm.]

3. Molekulare Diffusion

Die Verteilung von Material durch Diffusion gehört zu den Transportprozessen. Die kinematische Behandlung der Diffusion geht von der Massenerhaltung aus, die in differentieller Form in dem Gebiet, in dem keine Quellen und Senken für das in Betracht gezogene Material vorhanden sind, als "Bilanzgleichung" ("Kontinuitätsgleichung") geschrieben wird

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} = -\operatorname{div}(n_j \vec{v}_D) \quad \text{wobei } n_j \text{ die Teilchendichte des betrachteten Bestandteils und } \vec{v}_D$$

die "Diffusionsgeschwindigkeit" bedeuten.

Die Diffusionsgeschwindigkeit erhält man durch Lösen des dynamischen Problems, was im allgemeinen Fall sehr kompliziert sein kann. Bei Beschränkung auf den eindimensionalen Fall wird die Bilanzgleichung $\partial n / \partial t = -\partial(nw) / \partial z$ (w : Geschwindigkeitskomponente, z : Ortskoordinate). Vernachlässigt man alle äußeren Kräfte außer der Druckgradientkraft und einer geschwindigkeitsproportionalen Reibungskraft und alle Zwangskräfte, die im rotierenden System Erdatmosphäre auftreten und gibt es keine Strömung, in die der Diffusionsvorgang vor sich geht, dann wird die Bewegungsgleichung für w

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \nu w \quad \text{mit } \rho = mn \text{ (Massendichte) und } \nu \text{ als "wirksame" Stoßzahl.}$$

Der Betrag der Beschleunigung auf der linken Seite ist i.a. klein gegen die Beträge der beiden Terme auf der rechten Seite und kann daher gleich Null gesetzt werden, was wegen $p = nkT$ bei konstanter Temperatur

$$\text{zu } w = \frac{kT}{m\nu} \left[\frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial z} \right] \quad \text{führt. Mit räumlich konstantem } \nu \text{ folgt } \frac{\partial n}{\partial t} = -D \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} \quad \text{mit } D = \frac{kT}{m\nu}.$$

(Diffusion unter "Laborverhältnissen" bzw. kleinräumige Verhältnisse mit Linearskalen $\ll H$.)

Für die (gewöhnliche) Diffusionsgleichung kann als "Musterlösung" eine räumliche Glockenkurve mit zeitlich anwachsender Breite angesetzt werden:

$$n = \frac{n_o \sqrt{t_o}}{\sqrt{t+t_o}} \exp \left[-\frac{(z-z_o)^2}{4D(t+t_o)} \right]; \quad \text{Zentrum in } h = h_o, \text{ Halbwertsbreite zur Zeit } t = 0$$

$(\Delta z)_{1/2} = \sqrt{Dt_o} 2\sqrt{\log 2}$. Nimmt man als "charakteristische Zeit" die Zeit, die zur Verbreiterung um den Faktor 2 gebraucht wird, so gilt $t_{char} = 3t_o$. Für die Verbreiterung um den Faktor 4 wird $\Delta t = 15t_o$ u.s.w. Die ursprüngliche Verteilung nähert sich also dem diffusivem Gleichgewicht (in diesem Fall: Glockenkurve mit Breite $\rightarrow \infty$, was Gleichverteilung entspricht) immer langsamer an. Der Faktor vor der e-Potenz stellt sicher, daß die Fläche unter der Glockenkurve konstant bleibt (in dem Maße, in dem die Glockenkurve breiter wird, muß ihre Amplitude abnehmen). Das Konzept der "Musterlösung sich verbreiternde Glockenkurve" kann ohne weiteres auf den zwei- und dreidimensionalen Fall erweitert werden.

Im Prinzip lassen sich beliebige Anfangsverteilungen als Summen von Glockenkurven mit verschiedenen Zentren, Amplituden und Breiten darstellen.

Ganz allgemein kann man den Zusammenhang zwischen "charakteristischer Zeit" t_{char} und einer "charakteristischen Länge" L_{char} als $t_{char} = L_{char}^2 / D$ darstellen. Ohne auf Einzelheiten des Diffusionsprozesses einzugehen, genügt dann eine Abschätzung von L_{char} um bei bekannter Diffusionskonstante D herauszufinden, ob ein bestimmter Diffusionsprozess "schnell" oder "langsam" abläuft. Solche Angaben sind meist nur sinnvoll im Vergleich mit Abschätzungen über den Ablauf anderer Prozesse. Beispiel: mit einer Diffusionskonstanten von $D = 0,4 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1} = 4 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ und einer charakteristischen Länge von $L_{char} = 100 \text{ m}$ ergibt sich $t_{char} = 2,5 \times 10^9 \text{ s}$, was fast 8 Jahren entspricht. Selbst eine charakteristische Länge von $L_{char} = 1 \text{ m}$ ergibt mit $D = 0,4 \text{ cm}^2 / \text{s}^{-1}$ noch $t_{char} = 25000 \text{ s}$ und ist vergleichbar mit Zeiten, wie sie beim täglichen Temperaturgang auftreten.

Da die Stoßzahlen unter der Annahme starrer Kugeln proportional zur Teilchendichte und zur Wurzel aus der Temperatur sind, sollte für die Diffusionskonstante gelten $D \propto \sqrt{T} / n$. Bei Skalen die bei vertikaler

Diffusion vergleichbar mit oder größer als die Druckskalenhöhe sind, kann D keinesfalls als konstant angesehen werden, sondern wächst wegen $n \doteq n_o \exp(-z/H)$ etwa exponentiell mit $\exp(z/H)$ an.

Setzt man für $kT/m = (\bar{v})^2 \pi/8$ und für $\nu = n\sigma\bar{v}$ (siehe oben), dann wird $D = (\pi/8)\bar{v}/(n\sigma)$, oder mit der mittleren freien Weglänge $\lambda_f = \bar{v}/\nu = 1/(\sigma n)$ $D = (\pi/8)\bar{v}\lambda_f$.

Bei Beschränkung auf die eindimensionale Verteilung eines ‘‘Nebenbestandteils’’ (Index 1) in einer vertikal geschichteten Atmosphäre, die sich im Gleichgewicht befindet (in der also keine Umverteilung der ‘‘Hauptbestandteile’’ stattfindet) kann die Bilanzgleichung als $\partial n_1/\partial t = -\partial(n_1 w_1)/\partial z$ geschrieben werden (w_1 : Vertikalgeschwindigkeit, z : Vertikalkoordinate) und man erhält nach Nicolet (1960) die Spezialisierung des von Chapman und Cowling (1952) hergeleiteten allgemeinen Ausdrucks für die (vertikale) Diffusionsgeschwindigkeit

$$w_1 = -D \left[\frac{1}{n_1} \frac{\partial n_1}{\partial z} + \frac{1}{H_1} + (1 + \alpha) \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial z} \right]$$

Hier sind D der (höhenabhängige) Diffusionskoeffizient, der die Diffusionskonstante ersetzt, α der thermische Diffusionsfaktor, $H_1 = (kT)/(m_1 g)$ die Partialdruck-Skalenhöhe des Nebenbestandteils (g : Erdbeschleunigung). Empirische Daten von Diffusionskoeffizienten zeigen, daß die Temperaturabhängigkeit nach $\sqrt{T} = T^{0.5}$ zu korrigieren ist auf T^s , $s > 0.5$. Physikalische Begründung: das Modell des Stoßes harter Kugeln (konstante Stoßquerschnitte) ist nicht gut genug. Es muß vielmehr die Vorstellung verwendet werden, daß die Stoßquerschnitte mit der Teilchengeschwindigkeit (und damit mit der Temperatur) abnehmen. Nach Mason und Marrero (1970) gelten mit Ausnahme von H und H₂O für die Diffusion in Luft $s \doteq 0,75$.

4. Eddy-Diffusion (Verwirbelung)

In der Homosphäre ist die Durchmischung durch turbulente Vorgänge ein sehr wirksamer Prozess. Ohne auf Einzelheiten eingehen zu müssen, kann er durch eine Gleichung nach Art der Diffusionsgleichung beschrieben werden. Beschränkt man sich wieder auf den eindimensionalen Fall (vertikale Durchmischung) dann gilt für den Bestandteil der Art j , der mit einer schon im Mischgleichgewicht befindlichen Atmosphäre durchmischt werden soll

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} \left\{ -K_D \left[\frac{1}{n_j} \frac{\partial n_j}{\partial z} + \frac{1}{H} + \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial z} \right] \right\}$$

Der ‘‘Eddy-Diffusionskoeffizient’’ K_D ist ein empirischer Parameter zur summarischen Beschreibung der Auswirkung von sehr komplizierten kleinräumigen Bewegungsvorgängen und ist abhängig von der Teilchendichte n der durchmischten Atmosphäre, deren Druckskalenhöhe H als bekannt angenommen wird: $K_D \propto 1/\sqrt{n}$. Bei konstantem H gilt also (in guter Näherung) $K_D = (K_D)_0 \exp[z/(2H)]$. In einer Atmosphäre mit konstanter Skalenhöhe ist also die Zunahme des Eddy-Diffusionskoeffizienten mit der Höhe langsamer als die der Diffusionskonstanten für die molekulare Diffusion $D = D_0 \exp[z/H]$. $(K_D)_0$ ist um etwa 5 Größenordnungen größer als D_0 , was in der unteren Atmosphäre und in tieferen Bereichen der Mesosphäre die turbulente Durchmischung zu einem Prozess macht, der wesentlich schneller abläuft als die molekulare Diffusion. Die ‘‘Turbopause’’ ist so definiert, daß hier die beiden Prozesse (bei gleichen charakteristischen Längen!) gleich schnell ablaufen. Oberhalb der Turbopause nimmt K_D nicht mehr zu, sondern ab.

Typische Werte für K_D in der Troposphäre liegen nach Houghton (1986) zwischen $(1 \dots 10) \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. Verwendet man $K_D = 1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, dann erhält man in 100 km Höhe etwa $K_D = 1500 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, in 110 km Höhe $K_D = 3600 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.

5. Molekulare Wärmeleitung

Auch die molekulare Wärmeleitung kann nach Art eines Diffusionsproblems beschrieben werden.

Führt man zunächst den Wärmefluß $\vec{Q} = -\kappa \text{ grad } T$ ein (κ : Wärmeleitfähigkeit), so erhält man für die zeitliche Änderung des Produkts aus Wärmekapazität bei konstantem Druck mal Temperatur

$$\rho \frac{\partial(c_p T)}{\partial t} = -\text{div } \vec{Q} = \text{div } [\kappa \text{ grad } T]$$

was bei konstantem κ und konstantem c_p auf eine Diffusionsgleichung für die Temperatur führt

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{c_p \rho} \Delta T, \quad \Delta \text{ ist der Laplace-Operator.}$$

$\kappa = 2,40 \times 10^{-2} \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ gibt mit $c_p = 1005 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ und $\rho_o = 1,293 \text{ kg m}^{-3}$ den Zahlenwert $\kappa / (c_p \rho_o) = 1,85 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. In Bodennähe ist also die molekulare Wärmeleitung ein äußerst langsamer Prozess. Setzt man hingegen $\rho = 3,3 \times 10^{-11}$ (mittlere Dichte in 300 km Höhe) ein, dann erhält man $\kappa / (c_p \rho) = 7,2 \times 10^5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, was bei einer charakteristischen Länge von 100 km zu einer charakteristischen Zeit für die molekulare Wärmeleitung von etwa 14000 s oder 3,8 Stunden führt.

Literatur

Zitate:

S. Chapman und T.G. Cowling, The mathematical theory of non-uniform gases. Cambridge University Press, London und New York, 1952

E.A. Mason und T.R. Marrero, The diffusion of atoms and molecules, In: Advances in atomic and molecular physics (Hg.: D.R. Bates und I. Estermann) Academic Press, New York etc., 1970

M. Nicolet, The properties and constitution of the upper atmosphere. In: J.A. Ratcliffe (Hg.), Physics of the upper atmosphere, Academic Press, New York und London, 1960

Herangezogene (Lehr-)Bücher:

G. Joos, Lehrbuch der theoretischen Physik, 14. Aufl. Akad. Verlagsges. Wiesbaden, 1980

Bergmann – Schaefer, Lehrbuch der Experimentalphysik, Bd. 7, Erde und Planeten Kapitel 7 (Autor: S.J. Bauer), 2. Aufl., Walter de Gruyter, 2001

G. W. Prölss, Physik des erdnahen Weltraums, Springer, ISBN 3-540-42052-5, 2001

J. W. Chamberlain und D.M. Hunten, Theory of planetary atmospheres. 2. Aufl. Academic Press, ISBN 0-12-167252-2, 1987

J.K. Hargreaves, The upper atmosphere and solar-terrestrial relations. Van Nostrand Reinhold, ISBN 0 442 302169, 1979

R.A. Craig, The upper atmosphere. Meteorology and physics. Academic Press, New York und London, 1965

J.T. Houghton, The physics of atmospheres. 2. Aufl. Cambridge University Press, Cambridge etc., ISBN 0-521-22956-1, 1986

Doppelt normierte Maxwell-Verteilung.

Oben: Verteilungsfunktion $f(x)$,

Mitte: normiertes Integral von 0 bis x ueber Verteilungsfunktion $f(x)$,

unten: 1 minus normiertes Integral von 0 bis x ueber Verteilungsfunktion.

