Lineare Algebra II, Übungen, Sommersemester 2008
Lösungen zum 12. Übungsblatt

6. Da $\ker T^{n-2} \neq \ker T^{n-1}$ ist, existiert ein $v \in V$, sodass $T^{n-2}(v) \neq 0$ und $T^{n-1}(v) = 0$. Nach dem 1. Beispiel des 11. Übungsblattes sind die Vektoren $v, T(v), \ldots, T^{n-2}(v)$ linear unabhängig. Weiters sind sie alle verallgemeinerte Eigenvektoren von T zum Eigenwert $\lambda_0 = 0$. Die Dimension von U_0, der Menge der verallgemeinerten Eigenvektoren von T zu λ_0, ist demnach nicht kleiner als $n-1$.

   Hätte T mindestens 3 verschiedene Eigenwerte, dann gibt es neben λ_0 mindestens noch zwei weitere Eigenwerte λ_1 und λ_2, $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$, $i,j \in \{0,1,2\}$. Die Dimension von U_i, der Menge der verallgemeinerten Eigenvektoren von T zu λ_i, $i \in \{1,2\}$, ist größer gleich 1, und V enthält $U_0 \oplus U_1 \oplus U_2$. Daher ist $n = \dim V \geq \dim U_0 + \dim U_1 + \dim U_2 \geq n - 1 + 1 + 1 = n + 1$, was unmöglich ist. Also ist die Annahme, T hätte mindestens 3 verschiedene Eigenwerte, falsch.

7. (a) $\Longrightarrow$ (b): Nach Voraussetzung besitzt T bezüglich der Basis aus Eigenvektoren Diagonalgestalt. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von T. Dabei trete λ_i genau r_i-mal in der Diagonale auf, $1 \leq i \leq m$. Also ist $\dim V = \sum_{i=1}^m r_i$. Zum Eigenwert λ_i gibt es daher r_i linear unabhängige Eigenvektoren.

   Sei U_i, $1 \leq i \leq m$, die Menge der verallgemeinerten Eigenvektoren von T zum Eigenwert λ_i. Dann ist $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$. Also gilt $\dim V = \sum_{i=1}^m \dim U_i$. Die r_i linear unabhängigen Eigenvektoren von T zu λ_i liegen in U_i, daher ist $\dim U_i \geq r_i$, woraus $\dim V \geq \sum_{i=1}^m r_i$ folgt. Oben haben wir gezeigt, dass in dieser Ungleichung Gleichheit gilt, folglich muß $\dim U_i$ gleich r_i sein. Deshalb besitzt U_i eine Basis aus Eigenvektoren. Jeder verallgemeinerte Eigenvektor zu λ_i kann daher als Linearkombination von Eigenvektoren zu λ_i dargestellt werden, ist somit (falls ungleich 0) ein Eigenvektor zu λ_i (Nachrechnen!). Dies gilt für jedes $i \in \{1, \ldots, m\}$.

   (b) $\Longrightarrow$ (c): Der Operator T besitze genau $m \geq 1$ paarweise verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Sei $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$ die Zerlegung von V in die T-invarianten Unterräume U_i, die die Mengen der verallgemeinerten Eigenvektoren zu λ_i von T sind. Nach Voraussetzung sind die von 0 verschiedenen Elemente u von U_i bereits Eigenvektoren, d.h. sie erfüllen die Gleichung $(T - \lambda_i \mathrm{id})u = 0$.

   Sei $v \in V$, dann existieren eindeutig bestimmte $u_i \in U_i$, $1 \leq i \leq m$, so dass $v = u_1 + \cdots + u_m$ gilt. Da die Operatoren $(T - \lambda_i \mathrm{id})$ miteinander vertauschbar sind für $1 \leq i \leq m$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^m (T - \lambda_i \mathrm{id})v &= \prod_{i=1}^m (T - \lambda_i \mathrm{id})(u_1 + \cdots + u_m) \\
&= \sum_{j=1}^m \prod_{i=1}^m (T - \lambda_i \mathrm{id})u_j \\
&= \sum_{j=1}^m \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m (T - \lambda_i \mathrm{id})(T - \lambda_j \mathrm{id})u_j \right) \\
&= \sum_{j=1}^m \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m (T - \lambda_i \mathrm{id})0 \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

   (Achtung: Das Produkt von Operatoren ist deren Hintereinanderausführung!) Deshalb ist das Minimalpolynom von T ein Teiler von $\prod_{i=1}^m (z - \lambda_i)$. Da dieses Polynom normiert ist, und die Nullstellen dieses Polynoms genau die m verschiedenen Eigenwerte von T sind, ist dieses Polynom das Minimalpolynom von T.

(c) $\Longrightarrow$ (a): Sei $\dim V = n \in \mathbb{N}$ und seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, $1 \leq m \leq n$, die paarweise verschiedenen Eigenwerte von T. Da V ein komplexer Vektorraum ist, besitzt T eine Jordansche Normalform $\mathcal{T}$. Diese ist eine Blockdiagonalmatrix bestehend aus Jordanblöcken der Form

$$(\lambda_i), \qquad \text{oder} \qquad \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}, \qquad 1 \leq i \leq m.$$

Wir wollen zeigen, dass alle diese Blöcke nur von der Gestalt (λ_i) sind.

Indirekte Annahme, es gäbe einen Block von der Form $\lambda_{i_0} I_k + N$ mit $k \geq 2$, $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$ und

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $N^{k-1} \neq 0$ und $N^k = 0$. Folglich ist z^k das Minimalpolynom von N.

Nach Voraussetzung ist $\prod_{i=1}^m (z - \lambda_i)$ das Minimalpolynom von T. Daher gilt $\prod_{i=1}^m (\mathcal{T} - \lambda_i I_n) = 0$. Da $\mathcal{T}$ eine Blockdiagonalmatrix ist, gilt $\prod_{i=1}^m (\mathcal{T}_j - \lambda_i I_{n_j}) = 0$ für jeden Jordanblock $\mathcal{T}_j$ von $\mathcal{T}$ mit einer geeignet dimensionierten Einheitsmatrix I_{n_j}.

Also gilt dies auch für den oben beschriebenen Jordanblock $\lambda_{i_0} I_k + N$. Da die Matrizen I_k und N vertauschbar sind erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \prod_{i=1}^m (\lambda_{i_0} I_k + N - \lambda_i I_k) \\ &= \prod_{i=1}^m ((\lambda_{i_0} - \lambda_i) I_k + N) \\ &= \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^m ((\lambda_{i_0} - \lambda_i) I_k + N) \right) N \\ &= \left(a_0 I_k + \sum_{j=1}^{k-1} a_j N^j \right) N \\ &= a_0 N + \sum_{j=1}^{k-2} a_j N^{j+1} \end{aligned}$$

mit geeigneten $a_j \in \mathbb{C}$, $0 \leq j \leq k-1$, wobei insbesondere $a_0 \neq 0$ (Warum?). Wir erhalten ein (von 0 verschiedenes) Polynom $P(z) := a_0 z + \sum_{j=1}^{k-2} a_j z^{j+1}$ mit $P(N) = 0$. Deshalb ist das Minimalpolynom z^k von N ein Teiler von $P(z)$. Da a_0 ungleich 0 ist, folgt daraus $k = 1$, in Widerspruch zu unserer Annahme $k \geq 2$. Also war die Annahme falsch und alle Jordanblöcke von T sind 1×1-Matrizen. Folglich besitzt T bezüglich einer geeignet gewählten Basis Diagonalgestalt. Die Elemente dieser Basis sind dann Eigenvektoren von T, d.h. V besitzt eine Basis bestehend aus Eigenvektoren von T.