

Lineare Algebra II, Übungen, Sommersemester 2008
12. Übungsblatt, für den 18.6.2008

Sei V ein endlich dimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum, wobei \mathbb{K} für \mathbb{R} oder \mathbb{C} steht.

1. Zeigen oder widerlegen Sie: Ist T ein linearer Operator auf V , dann ist $V = \ker T \oplus T(V)$.
2. Sei T ein linearer Operator auf V mit $T^2 = T$. Zeigen Sie, dass dann $V = \ker T \oplus T(V)$ gilt.
3. (a) Geben Sie einen Operator T auf \mathbb{C}^4 an, dessen Minimalpolynom gleich $z(z-1)^2$ ist.
(b) Geben Sie einen Operator T auf \mathbb{C}^4 an, dessen charakteristisches Polynom und Minimalpolynom gleich $z(z-1)^2(z-3)$ sind.
Begründen Sie genau die Wahl von T .
4. Zeigen Sie: Der lineare Operator $T: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$, $T(z_1, z_2, z_3) = (z_2, z_3, 0)$ besitzt keine Quadratwurzel.
5. Sei N ein linearer Operator auf \mathbb{K}^5 gegeben durch $N(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) = (2z_2, 3z_3, -z_4, 4z_5, 0)$. Bestimmen Sie eine Quadratwurzel von $\text{id}_{\mathbb{K}^5} + N$.
6. Sei $\dim V = n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, und T ein linearer Operator auf V so dass $\ker T^{n-2} \neq \ker T^{n-1}$. Zeigen Sie, T hat höchstens 2 verschiedene Eigenwerte.
7. Sei V ein \mathbb{C} -Vektorraum und T ein linearer Operator auf V . Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
 - (a) V besitzt eine Basis aus Eigenvektoren.
 - (b) Jeder (von 0 verschiedene) verallgemeinerte Eigenvektor T ist ein Eigenvektor von T .
 - (c) Das Minimalpolynom von T besitzt nur einfache Nullstellen.