Lineare Algebra II, Übungen, Sommersemester 2008
1. Übungsblatt, für den 5.3.2008

1. Sei n eine nichtnegative ganze Zahl. Eine Abbildung $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$, deren Koeffizienten a_i komplexe Zahlen sind, nennen wir (komplexe) Polynom(abbildung). Falls der Koeffizient a_n ungleich 0 ist, heißt n der Grad von f. Ist $a_n = 1$ so bezeichnet man f als normiert. Polynome, deren Grad mindestens 1 ist, heißen nichtkonstant. Wir nennen f ein reelles Polynom, falls alle Koeffizienten a_i reelle Zahlen sind.
   a) Sei f ein reelles Polynom und $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ eine Nullstelle von f, d.h. $f(z) = 0$. Zeigen Sie, dass $\bar{z}$, das komplex konjugierte von z, ebenfalls eine Nullstelle von f ist.
   b) Beweisen Sie, dass jedes normierte, nichtkonstante reelle Polynom als Produkt von normierten reellen Polynomen vom Grad 1 oder 2 geschrieben werden kann, wobei die Polynome vom Grad 2 genau zwei konjugierte nicht reelle Nullstellen besitzen.
   Hinweis: Verwenden Sie den Fundamentalsatz der Algebra.

2. a) Zeigen Sie, dass jedes normierte reelle Polynom vom Grad 3 mindestens eine reelle Nullstelle besitzt.
   Hinweis: Führen Sie zwei Beweise. Für den ersten Beweis benützen Sie das 1. Übungsbeispiel. Den zweiten Beweis bauen Sie auf dem Zwischenwertsatz (aus der Analysis) auf. Untersuchen Sie für welche $r \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $|r^3| > |a_2 r^2 + a_1 r + a_0|$ erfüllt ist, und folgern Sie daraus, dass $f(r)$ und $f(-r)$ für hinreichend große r unterschiedliche Vorzeichen haben.
   b) Verallgemeinern Sie den ersten Beweis und zeigen Sie, dass jedes reelle Polynom von ungeradem Grad mindestens eine reelle Nullstelle besitzt.

3. Bestimmen Sie alle A-invarianten Unterräume des $\mathbb{R}^2$ für

$$\text{a)}\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)}\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{c)}\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Sei K ein Körper, $\alpha \in K \setminus \{0\}$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}$. Für $K = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{C}$, $K = \mathbb{F}_2$ und $K = \mathbb{F}_3$ bestimmen Sie alle A-invarianten Unterräume des K^2.
   Hinweis: $\mathbb{F}_2$ ist der Körper $\{\bar{0}, \bar{1}\}$ bestehend aus den Restklassen modulo 2, $\mathbb{F}_3$ der Körper $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ bestehend aus den Restklassen modulo 3 mit den Verknüpfungstabellen (wobei wir nun bei den Restklassen den Querstrich weglassen):

$\mathbb{F}_2$:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

$\mathbb{F}_3$:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1