Name:.............................. **Matrikelnr.:**..............................

ÜBUNGEN ZUR HÖHEREN MATHEMATIK 3 WS 2007

4. Kurztest, 14. 1. 2008

Sei $T(x, y, z) = 100 + x^2 + y^2$ die Temperatur auf der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 50$ im Punkt (x, y, z). Bestimmen Sie die maximale und minimale Temperatur auf dem Schnitt der Kugel mit der Ebene $x + y + z = 0$.

Hinweis: Bestimmen Sie den Schnitt der Kugel mit der Ebene als Gleichung in zwei Unbestimmten und verwenden Sie diese dann als Nebenbedingung für die Optimierungsaufgabe.

In der Kugelgleichung setze man $z = -x - y$, dann erhält man $x^2 + y^2 + (-x - y)^2 = 50$, also $x^2 + xy + y^2 = 25$. Dies liefert nun

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 100 + x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + xy + y^2 - 25).$$

Das System $\partial\mathcal{L}/\partial x = 0$, $\partial\mathcal{L}/\partial y = 0$ und $\partial\mathcal{L}/\partial\lambda = 0$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} 2x + 2\lambda x + \lambda y &= 0 \\ 2y + 2\lambda y + \lambda x &= 0 \\ x^2 + xy + y^2 - 25 &= 0. \end{aligned}$$

Es gibt nun verschiedene Wege, dieses System zu lösen. Hier eine Möglichkeit, in der zweiten Gruppe eine andere Möglichkeit.

Aus der ersten Gleichung erhalten wir $\lambda = -2x/(2x + y)$ falls $2x + y \neq 0$.

Betrachten wir zuerst $2x + y \neq 0$. Ersetzt man λ in der zweiten Gleichung durch $-2x/(2x + y)$ so erhält man $2y^2 = 2x^2$ also $y = \pm x$.

Für $y = x$ erhalten wir aus der dritten Gleichung $3x^2 = 25$, also $x = \pm 5/\sqrt{3}$. In diesem Fall ist $T(5/\sqrt{3}, 5/\sqrt{3}, -10/\sqrt{3}) = T(-5/\sqrt{3}, -5/\sqrt{3}, 10/\sqrt{3}) = 100 + 50/3$.

Für $y = -x$ liefert die dritte Gleichung $x^2 = 25$, also $x = \pm 5$. Da $z = -x - y$ ist in diesem Fall $z = 0$ und $T(5, -5, 0) = T(-5, 5, 0) = 150$.

Nun müssen wir noch die Situation $2x + y = 0$ untersuchen. Setzen wir in der ersten Gleichung $y = -2x$ so folgt $2x = 0$, also $x = 0$. Dieser Fall kann nicht auftreten, da sonst ebenfalls $y = -2x = 0$ gilt, was in Widerspruch zur dritten Gleichung steht. Es gibt folglich keine Lösungen des Systems mit $2x + y = 0$.

Also ist 150 die maximale und $100 + 50/3$ die minimale Temperatur auf dem Schnitt der Kugel mit der Ebene.

Name:.............................. **Matrikelnr.:...............................**

ÜBUNGEN ZUR HÖHEREN MATHEMATIK 3 WS 2007

4. Kurztest, 14. 1. 2008

Sei $T(x, y, z) = 100 + y^2 + z^2$ die Temperatur auf der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 50$ im Punkt (x, y, z). Bestimmen Sie die maximale und minimale Temperatur auf dem Schnitt der Kugel mit der Ebene $x + y + z = 0$.

Hinweis: Bestimmen Sie den Schnitt der Kugel mit der Ebene als Gleichung in zwei Unbestimmten und verwenden Sie diese dann als Nebenbedingung für die Optimierungsaufgabe.

In der Kugelgleichung setze man $x = -y - z$, dann erhält man $(-y - z)^2 + y^2 + z^2 = 50$, also $y^2 + yz + z^2 = 25$. Dies liefert nun

$$\mathcal{L}(y, z, \lambda) = 100 + y^2 + z^2 + \lambda(y^2 + yz + z^2 - 25).$$

Das System $\partial\mathcal{L}/\partial y = 0$, $\partial\mathcal{L}/\partial z = 0$ und $\partial\mathcal{L}/\partial\lambda = 0$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} 2y + 2\lambda y + \lambda z &= 0 \\ 2z + 2\lambda z + \lambda y &= 0 \\ y^2 + yz + z^2 - 25 &= 0. \end{aligned}$$

Subtraktion der zweiten Gleichung von der ersten liefert $2(y - z)(1 + \lambda) = \lambda(y - z)$.

Falls $y \neq z$, dann ist $2(1 + \lambda) = \lambda$ also $\lambda = -2$. Dieser Wert von λ in der ersten Gleichung eingesetzt ergibt die Beziehung $y = -z$. Die dritte Gleichung liefert dann $y^2 = 25$, also $y = \pm 5$. Da $x = -y - z$ ist in diesem Fall $x = 0$ und $T(0, 5, -5) = T(0, -5, 5) = 150$.

Im Fall $y = z$ stimmen die ersten beiden Gleichungen überein, und aus der ersten erhalten wir $2y + 3\lambda y = 0$. Falls $y \neq 0$, dann ist $\lambda = -2/3$. (Der Fall $z = y = 0$ ist nicht möglich, da er in Widerspruch zur 3. Gleichung steht.) Aus der dritten Gleichung erhalten wir $3y^2 = 25$, also $y = \pm 5/\sqrt{3}$. In diesem Fall ist $T(-10/\sqrt{3}, 5/\sqrt{3}, 5/\sqrt{3}) = T(10/\sqrt{3}, -5/\sqrt{3}, -5/\sqrt{3}) = 100 + 50/3$.

Also ist 150 die maximale und $100 + 50/3$ die minimale Temperatur auf dem Schnitt der Kugel mit der Ebene.